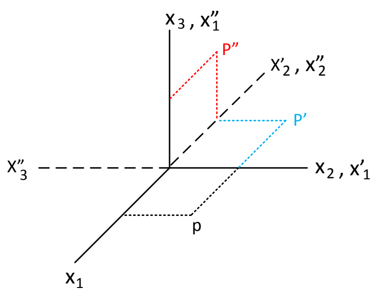
مثال: یک جسم صلب حول محور x_3 در جهت پادساعت‌گرد به میزان $90°$ می‌چرخد. سپس جسم مذکور حول محور x_1، $90°$ مطابق با قاعده‌ی پیچ چپ‌گرد می‌چرخد. ماتریس بیان دو چرخش را به‌دست آورید. اگر موقعیت نقطه‌ی $P\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ در ابتدا معلوم باشد، موقعیت آن را پس از هر چرخش به‌دست آورید.

حلّ:



چرخش حول محور x_3

$$\tilde{R}\hat{e}_j = R_{ij}\hat{e}_i = \hat{e}_j \begin{cases} \tilde{R}\hat{e}_1 = \hat{e}_2 = R_{11}\hat{e}_1 + R_{21}\hat{e}_2 + R_{31}\hat{e}_3 \\ \tilde{R}\hat{e}_2 = -\hat{e}_1 = R_{12}\hat{e}_1 + R_{22}\hat{e}_2 + R_{32}\hat{e}_3 \\ \tilde{R}\hat{e}_3 = \hat{e}_3 = R_{13}\hat{e}_1 + R_{23}\hat{e}_2 + R_{33}\hat{e}_3 \end{cases} \qquad \tilde{R} = \left[R_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \tilde{R} = +1 \quad rotation$$

$$\vec{p}' = \tilde{R}\vec{p} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

چرخش حول محور x_1

$$\tilde{S}\hat{e}_j = S_{ij}\hat{e}_i = \hat{e}_j \begin{cases} \tilde{S}\hat{e}_1 = \hat{e}_1 = S_{11}\hat{e}_1 + S_{21}\hat{e}_2 + S_{31}\hat{e}_3 \\ \tilde{S}\hat{e}_2 = \hat{e}_3 = S_{12}\hat{e}_1 + S_{22}\hat{e}_2 + S_{32}\hat{e}_3 \\ \tilde{S}\hat{e}_3 = -\hat{e}_2 = S_{13}\hat{e}_1 + S_{23}\hat{e}_2 + S_{33}\hat{e}_3 \end{cases} \qquad \tilde{S} = \left[S_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \tilde{S} = +1 \quad rotation$$

$$\vec{p}'' = \tilde{S}\,\vec{p}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

راه حلّ دوم: چرخش حول نیمساز محورهای x_3 و x_1

$$\tilde{T} = \tilde{S}\tilde{R} = \left[\tilde{S}\right]\left[\tilde{R}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}'' = \tilde{T}\,\vec{p} = \left(\tilde{S}\tilde{R}\right)\vec{p} = \tilde{S}\left(\tilde{R}\,\vec{p}\right) = \tilde{S}\,\vec{p}'$$

$$\vec{p}'' = \tilde{T}\,\vec{p} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Diagonal tensor

تانسور قطری، ماتریس مربّعی است که درایه‌های غیر قطری آن صفر هستند.

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix} \quad \left\{ T_{ij} = 0 \quad \text{if} \quad i \neq j \right.$$

Identity tensor

تانسور همانی (یکّه)، یک تانسور قطری است که هر بردار را به خودش تبدیل می‌کند.

$$\tilde{I}\vec{a} = \vec{a} \;\rightarrow\; \tilde{I}a_j\hat{e}_j = a_j\hat{e}_j \;\rightarrow\; \tilde{I}\hat{e}_j = \hat{e}_j$$

$$I_{ij} = \hat{e}_i \cdot \tilde{I}\hat{e}_j = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\tilde{I} = \left[\delta_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{identity (unit) tensor}$$

Tensor transpose

اگر جای سطرها و ستون‌های یک تانسور عوض شوند، تانسور ترانهاد (برگردان) می‌شود.

$$T_{ji}^{T}=T_{ij}\ \rightarrow\ \hat{e}_j\cdot\tilde{T}^T\hat{e}_i=\hat{e}_i\cdot\tilde{T}\hat{e}_j$$
$$a_ib_j\left(\hat{e}_j\cdot\tilde{T}^T\hat{e}_i\right)=a_ib_j\left(\hat{e}_i\cdot\tilde{T}\hat{e}_j\right)\ \Rightarrow\ b_j\hat{e}_j\cdot\left(\tilde{T}^Ta_i\hat{e}_i\right)=a_i\hat{e}_i\cdot\left(\tilde{T}b_j\hat{e}_j\right)$$
$$\Rightarrow\vec{b}\cdot\left(\tilde{T}^T\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\left(\tilde{T}\vec{b}\right)$$

$$\vec{a}\cdot\tilde{T}\vec{b}=\vec{b}\cdot\tilde{T}^T\vec{a}$$

<u>Symmetric & Antisymmetric tensor</u>

در تانسور متقارن، درایه‌ها پس از ترانهاد (برگردان)، تغییر نمی‌کنند.

$$\text{symmetric}\quad \tilde{T}^T=\tilde{T}\ \rightarrow\ \left\{T_{ji}=T_{ij}\right.$$

در تانسور پادمتقارن، درایه‌های غیرقطری پس از ترانهاد (برگردان)، قرینه می‌شوند.

$$\text{antisymmetric}\quad \tilde{T}^T=-\tilde{T}\ \rightarrow\ T_{ji}=\begin{cases}-T_{ij} & \text{if } i\neq j\\ 0 & \text{if } i=j\end{cases}$$

$$\tilde{T}=\tilde{T}^S+\tilde{T}^A\quad \&\quad \tilde{T}^T=\tilde{T}^S-\tilde{T}^A$$

$$\begin{cases}\tilde{T}^S=\dfrac{1}{2}\left(\tilde{T}+\tilde{T}^T\right)\\[2mm] \tilde{T}^A=\dfrac{1}{2}\left(\tilde{T}-\tilde{T}^T\right)\end{cases}$$

مثال: تانسور $\tilde{T}$ را به دو تانسور متقارن و پادمتقارن تجزیه نمایید.

$$\tilde{T}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

<u>حلّ:</u>

$$\tilde{T}^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{T}^{S} = \dfrac{1}{2}\left(\tilde{T} + \tilde{T}^{T}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \tilde{T}^{A} = \dfrac{1}{2}\left(\tilde{T} - \tilde{T}^{T}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$